

DAFTAR ISI

KOMPETENSI/SUBKOMPETENSI	1
PENDAHULUAN	2
HITUNG KEUANGAN	5
I. Bunga Tunggal	5
A. Pengertian Bunga Tunggal	5
B. Menghitung Bunga Tunggal	7
II. Bunga Majemuk	14
A. Pengertian Bunga Majemuk	14
B. Pembahasan Masalah Bunga Majemuk	16
III. Rente	17
A. Rente Pranumerando	17
B. Rente Post Numerando	20
C. Rente Kekal	23
D. Rente Yang Ditangguhkan	26
SOAL-SOAL LATIHAN	31
DAFTAR PUSTAKA	33

HITUNG KEUANGAN

KOMPETENSI /SUBKOMPETENSI

Kompetensi/Subkompetensi dari materi Hitung Keuangan yang disusun di dalam modul ini adalah adanya kemampuan memahami Ilmu Hitung Keuangan dan mampu menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari.

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Ilmu Hitung Keuangan merupakan bagian dari matematika terapan yang hampir setiap hari digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah perhitungan keuangan, baik pelakunya adalah individu, maupun organisasi/instansi.

Penyampaian materi Ilmu Hitung Keuangan dengan cara pengenalan rumus secara teoritik abstrak yang menggunakan lambang-lambang atau notasi sangat berat untuk dipahami siswa secara umum. Demikian pula penggunaan rumus secara instan di dalam memecahkan masalah-masalah perhitungan keuangan menyebabkan pemahaman siswa terhadap masalah-masalah perhitungan keuangan menjadi dangkal. Untuk itu perlu disusun penyampaian materi Ilmu Hitung Keuangan yang lebih aplikatif dan mampu menanamkan pemahaman kepada siswa terhadap masalah-masalah perhitungan keuangan dengan lebih baik.

Tujuan

tujuan penulisan bahan ajar ini adalah untuk menyusun penyampaian materi Ilmu Hitung Keuangan yang aplikatif di dalam menjelaskan proses pembentukan rumus-rumus perhitungan keuangan dan untuk menanamkan pemahaman siswa dengan lebih baik lagi terhadap masalah-masalah perhitungan keuangan khususnya tentang Bunga Tunggal, Bunga Majemuk, dan Rente.

Ruang Lingkup

Tulisan bahan ajar ini mencakup materi tentang Bunga Tunggal, Bunga Majemuk, dan Rente, yang diawali dengan penyampaian materi penghitungan matematika dasarnya. Di samping itu juga diberikan soal-soal evaluasi untuk pendalaman.

Perhitungan-perhitungan Dasar untuk Menyelesaikan Masalah Keuangan

Penghitungan keuangan dapat menggunakan Daftar Bunga, Logaritma maupun Kalkulator

1. Daftar Bunga

Penggunaan Daftar Bunga untuk menyelesaikan perhitungan matematika keuangan sangat terbatas. Yang dapat dilihat di dalam Daftar Bunga adalah nilai dari $(1+i)^n$ untuk n dari 1 sampai 50 dan i dari $1\frac{1}{2}\%$ sampai 6%

Contoh

Berapakah nilai dari $1.000.000 \times (1+0,03)^3$

Jawab

$$\begin{aligned} 1.000.000 \times (1+0,03)^3 &= 1.000.000 (1,03)^3 \rightarrow \text{Dari Daftar Bunga diketahui} \\ &= 1.000.000 (1,092727) \\ &= 1.092.727 \end{aligned}$$

Daftar Bunga juga dapat digunakan untuk menyelesaikan perhitungan-perhitungan yang berbentuk sigma.

Contoh

Berapakah nilai dari $100.000 (1,05 + 1,05^2 + 1,05^3 + 1,05^4 + 1,05^5)$?

Jawab

$$1,05 + 1,05^2 + 1,05^3 + 1,05^4 + 1,05^5 = \sum_{k=1}^5 (1,05)^k \rightarrow \text{Dari Daftar Bunga diketahui}$$
$$\sum_{k=1}^5 (1,05)^k = 5,80191281$$

maka

$$\begin{aligned} 100.000 (1,05 + 1,05^2 + 1,05^3 + 1,05^4 + 1,05^5) &= 100.000 \sum_{k=1}^5 (1,05)^k \\ &= 100.000 \times 5,80191281 \\ &= 580.191,281 \end{aligned}$$

2. Logaritma

Apabila perhitungan tidak dapat menggunakan Daftar Bunga, maka dapat digunakan perhitungan Logaritma.

Contoh

Berapakah nilai dari $10.000.000 \times (1,07)^3$?

Jawab

$$\begin{aligned}\log [10.000.000 (1,07)^3] &= \log 10^7 + \log (1,07)^3 \\ &= 7 \log 10 + 3 \log (1,07) \rightarrow \text{Dari Daftar Logaritma diketahui} \\ &= 7 + 3(0,029384) \quad \log (1,07) = 0,029384 \\ &= 7,088152\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}10.000.000(1,07)^3 &= \text{anti log } (7,088152) \\ &= 12.250.448,8\end{aligned}$$

3. Kalkulator

Dengan menggunakan Kalkulator, perhitungan keuangan mudah diselesaikan.

Contoh

Hitunglah nilai dari $1.000.000 \times (1,07)^3$

Jawab

Dengan Kalkulator Casio Fx 3600P tekan tombol berikut secara berurutan

1	.	0	7	inv	x ^y	3	×	1	0	0	0	0	0	0	=
---	---	---	---	-----	----------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

maka pada layar akan ditampilkan 1.225.043

HITUNG KEUANGAN

Materi pembelajaran hitung keuangan yang akan dibahas di sini mencakup:

1. Bunga Tunggal
2. Bunga Majemuk
3. Rente

Sebelum masuk kepada pembahasan ketiganya, perlu dipahami dahulu beberapa istilah-istilah yang penting, seperti Modal, Nilai Akhir, dan Nilai Tunai. Pengertian modal secara sederhana di dalam pembahasan materi ini adalah sejumlah uang/barang yang besar dapat berubah. Modal yang menjadi besar karena adanya penambahan bunga dalam jangka waktu tertentu disebut Nilai Akhir Modal. Modal yang telah dikeluarkan bunganya disebut Nilai Tunai. Sedangkan modal yang tidak berubah besarnya dan dibayarkan/diterima rutin di setiap jangka waktu tertentu disebut Angsuran.

I. BUNGA TUNGGAL

A. Pengertian Bunga Tunggal

Untuk menjelaskan bunga tunggal, guru perlu menjelaskan dahulu kepada siswa pengertian pokok pinjaman bunga dan persentase bunga. Untuk mudahnya berikan contoh

Contoh:

Misalkan Erman meminjam uang sebesar Rp 1.000.000,00 pada Joko. Sebagai tanda jasa Erman memberikan uang Rp 50.000,00 setiap tahun. Maka uang Rp. 1.000.000,00 yang dipinjam itu disebut pokok pinjaman atau modal (meskipun pengertian modal lebih luas dari itu), sedangkan uang jasa yang sebesar Rp 50.000,00 tersebut disebut bunga. Pengertian yang lebih lengkap, bunga adalah persentase dari modal yang disepakati bersama sebagai jasa pinjaman yang diperhitungkan untuk setiap jangka

waktu tertentu. Jangka waktu yang digunakan di dalam perhitungan bunga adalah tahun, bulan, atau hari. Jika tidak disebutkan jangka waktunya, maka jangka waktu yang digunakan adalah tahun. Besarnya bunga dinyatakan dalam persen, dan disebut suku bunga. Pada contoh di atas modal yang dipinjam Erman diperhitungkan dengan dasar bunga sebesar $\frac{50.000}{1.000.000} \times 100\% = 5\%$ setahun. Apabila bunga yang dihasilkan pada setiap jangka waktu tersebut tidak berubah, maka dikatakan bahwa modal itu diperbungakan atas dasar **Bunga Tunggal**. Jika modal M dibungakan atas dasar bunga tunggal i persen, maka gabungan modal dan bunga:

$$\text{Sesudah 1 tahun modal} = M + iM$$

$$\text{Sesudah 2 tahun modal} = M + 2iM$$

$$\text{Sesudah 3 tahun modal} = M + 3iM$$

.
.
.
.
.
.

dan seterusnya

Terlihat bahwa M, M+iM, M+2iM, M+3iM,, dst merupakan barisan aritmetika.

Persen di Bawah Seratus dan di Atas Seratus

1. Persen di Bawah Seratus

Persen di bawah seratus adalah perbandingan yang dinyatakan dengan suatu pecahan dimana jumlah pembilang dan penyebutnya adalah

seratus, dan ditulis p% di bawah seratus adalah: $\frac{p}{100 - p}$

Contoh

Hitunglah 4% di bawah seratus dari Rp 1.000.000,00

Jawab

$$\begin{aligned}\text{Bunga 4\% di bawah seratus dari 1.000.000} &= \frac{4}{100 - 4} \times 1.000.000 \\ &= \frac{4}{96} \times 1.000.000 \\ &= 41.666,67\end{aligned}$$

2. Persen di atas Seratus

Persen di atas Seratus adalah perbandingan yang dinyatakan dengan suatu pecahan yang selisih penyebut dengan pembilang adalah 100, dan

ditulis p% di atas seratus adalah $\frac{p}{100 + p}$

Contoh

Hitunglah 5% di atas seratus dari Rp 420.000,00

Jawab

$$\begin{aligned}5\% \text{ di atas seratus dari } 420.000 &= \frac{5}{100 + 5} \times 420.000 \\ &= \frac{5}{105} \times 420.000 \\ &= 20.000\end{aligned}$$

Rumus Persen di atas Seratus dan di bawah Seratus dapat digunakan di dalam perhitungan bunga dan Diskonto berikut ini.

B. Menghitung Bunga Tunggal

B.1. Bunga dan Diskonto

Bunga

Contoh

Seseorang meminjam uang dengan bunga 5% setahun. Bila setelah 1 tahun ia membayar Rp 2.000.000,00 terdiri dari pelunasan dan bunga, berapakah besar bunga yang dibayarnya?

Jawab

Misalnya uang yang dipinjamnya sebesar M_0 , maka

$$\frac{5}{100} \cdot M_0 + M_0 = 2.000.000$$

$$M_0 \left(\frac{5}{100} + 1 \right) = 2.000.000$$

$$M_0 \left(\frac{100 + 5}{100} \right) = 2.000.000$$

$$M_0 = 2.000.000 \times \frac{100}{100 + 5}$$

$$\text{Bunga} = 2.000.000 - M_0$$

$$= 2.000.000 - 2.000.000 \times \frac{100}{100 + 5}$$

$$= 2.000.000 \left(1 - \frac{100}{100 + 5} \right)$$

$$= 2.000.000 \left(\frac{5}{100 + 5} \right) \rightarrow \text{Rumus:}$$

$$B = K \times \frac{p}{100 + p}$$

B = Bunga, K = Pengembalian
dan p = angka suku bunga

$$= 95.238,13$$

Jadi bunga yang dibayarnya adalah Rp 95.238,13

Diskonto

Apabila bunga dari suatu pinjaman dibayarkan terlebih dahulu pada saat awal pinjaman sehingga besarnya uang yang diterima merupakan selisih antara besarnya pinjaman dengan besarnya bunga. Sedangkan besarnya uang yang harus dikembalikan sama dengan nilai besarnya pinjaman. Inilah yang disebut dengan diskonto.

Contoh

Seseorang meminjam uang dengan diskonto 4% setahun. Jika orang tersebut menerima Rp 15.000.000,00 berapakah pinjaman yang harus dikembalikan sesudah 1 tahun?

Jawab

Misalkan uang yang dipinjam sebesar M_0 maka:

$$M_0 - \frac{4}{100}M_0 = 15.000.000$$

$$M_0 \left(1 - \frac{4}{100}\right) = 15.000.000$$

$$M_0 \left(\frac{100 - 4}{100}\right) = 15.000.000$$

$$M_0 = 15.000.000 \times \frac{100}{100 - 4}$$
$$\text{Bunga diskonto} = M_0 \times \frac{4}{100}$$

$$= 15.000.000 \times \frac{100}{100 - 4} \times \frac{4}{100}$$

$$= 15.000.000 \times \frac{4}{100 - 4} \rightarrow \text{Rumus:}$$

$$\text{BD} = T \times \frac{p}{100 - p}$$

di mana p nilai angka suku bunga, T besar uang yang diterima dan BD bunga diskonto

$$= 15.000.000 \times \frac{4}{96}$$

$$= 624.999,9$$

Pinjaman yang harus dikembalikan = 15.000.000 + 624.999,9

$$= 15.624.999,9$$

Jadi pinjaman yang harus dikembalikan \approx Rp15.625.000,00

B.2. Metode Perhitungan Bunga

Besarnya bunga dihasilkan dari perkalian antara modal, persen suku bunga, dan waktu.

Contoh

Berapa besarnya bunga dari suatu modal sebesar Rp 500.000,00 yang diperbungakan selama 6 bulan dengan dasar bunga tunggal 4% setahun.

Jawab

Karena suku bunga dalam tahun, maka waktu = $\frac{6 \text{ bln}}{12 \text{ bln/thn}}$

Besar bunga = $500.000 \times \frac{4}{100} \times \frac{6}{12} \rightarrow$ Rumus:

$$I = M \cdot i \cdot \frac{n}{k}$$

i = bunga n = waktu
pembungaan
k = 12 jika n = dalam bulan
k = 360 jika n = dalam hari

= 10.000 jadi besar bunga Rp10.000,00

Dengan alat bantu kalkulator, nilai suku bunga berapapun dan masa transaksi berapa lama pun dapat dihitung dengan mudah menggunakan rumus tersebut. Namun demikian ada beberapa model penghitungan yang lain yang perlu untuk diketahui:

a) Metode Pembagi Tetap

Dalam metode ini, satu tahun adalah 360 hari Misalkan suatu modal M dibungakan selama w hari berdasarkan suku bunga p%, maka besarnya:

$$\begin{aligned} \text{bunga w hari} &= \frac{w}{360} \times \frac{p}{100} \times M \\ &= \frac{Mw}{360} \times \frac{p}{100} \\ &= \frac{Mw}{100} \times \frac{p}{360} \\ &= \frac{Mw}{100} \cdot \frac{360}{p} \end{aligned}$$

untuk berbagai modal yang digunakan dengan persentase yang sama $p\%$ pecahan $\frac{360}{p}$ mempunyai nilai yang tetap. Oleh karena itu $\frac{360}{p}$ disebut pembagi tetap, sedangkan $\frac{Mw}{100}$ disebut angka bunga.

Dapat dirumuskan:

$$\text{Bunga} = \frac{\text{angka bunga}}{\text{pembagi tetap}}$$

Contoh:

seseorang meminjam uang sebesar Rp 500.000,00 selama 120 hari dengan bunga 6% setahun. Berapakah bunga yang harus dibayarkannya?

Jawab:

$$M = 500.000, \quad i = 6\% \rightarrow p = 6, \quad w = 120$$

$$\text{angka bunga} = \frac{Mw}{100} = \frac{500.000 \times 120}{100} = 600.000$$

$$\text{pembagi tetap} = \frac{360}{6} = 60$$

$$\text{Bunga} = \frac{600.000}{60} = 10.000$$

Jadi bunga yang harus dibayarkannya Rp 10.000,00

Metode ini dapat digunakan untuk menghitung nilai bunga bagi orang banyak yang meminjam/membayar dengan nilai pinjaman/bayaran dan waktu yang beragam.

Contoh

Hitunglah jumlah bunga dari modal-modal berikut ini, jika suku bunganya 4% pertahun dan 1 tahun = 360 hari.

Modal (Rp)	waktu (hr)
800.000,00	120
600.000	240
1.200.000	100

Jawab

$$\text{Pembagi tetap} = \frac{360}{4} = 90$$

Modal (Rp)	Waktu (hr)	Angka Bunga (Rp)
800.000	120	960.000
600.000	240	1.440.000
1.200.000	100	1.200.000
Jumlah		3.600.000

$$\text{Bunga} = \frac{3.600.000}{90} = 40.000$$

Jadi jumlah bunganya Rp 40.000,00

b) Metode Bagian Yang Seukuran terhadap Persen

Perlu dijelaskan kepada siswa bahwa di dalam metode ini 1 tahun = 365 hari seperti yang berlaku dalam perhitungan di Inggris. Sedangkan dasar bunga yang digunakan adalah 5%. Untuk persentase yang lainnya, harus diukurkan (diperbandingkan) terhadap bunga yang 5%. Misalkan M diperbungakan selama w hari, maka:

$$\text{Bunga} = \frac{w}{365} \times \frac{5}{100} \times M$$

$$= \frac{Mw}{100} \times \frac{5}{365}$$

$$= \frac{Mw}{100} \times \frac{1}{73}$$

$$= \frac{Mw}{10.000} \times \frac{100}{73}$$

karena $\frac{100}{73} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}$

maka

$$\text{Bunga} = \frac{Mw}{10.000} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300} \right)$$

Contoh

Modal sebesar Rp 1.000.000,00 diperbungakan atas dasar suku bunga 4,5 % setahun selama 150 hari (1 tahun = 365 hari).

Jawab

$$\frac{Mw}{10.000} = \frac{1.000.000 \times 150}{10.000} = 15.000$$

$$\frac{1}{3} \times 15.000 = 5.000$$

$$\frac{1}{30} \times 15.000 = 500$$

$$\frac{1}{300} \times 15.000 = 50$$

Bunga 5% selama 150 hari = 15.000 + 5.000 + 500 + 50 = 20.550.

$$\text{Bunga } \frac{1}{2}\% = \frac{1/2}{5} \times 20.550 = 2.055$$

$$\begin{aligned} \text{Bunga 4,5 \% selama 150 hari} &= 20.550 - 2.055 \\ &= \text{Rp } 18.495,00 \end{aligned}$$

c) Metode Bagian yang Seukuran terhadap Waktu

Di di dalam metode ini 1 tahun = 360 hari dan tiap persentase bunga mempunyai masa bunga yang tertentu pula. Misalkan modal sebesar M diperbungakan selama w hari dengan dasar bunga p% setahun, maka:

$$\text{Bunga} = \frac{M}{100} \times \frac{wp}{360}, \text{ dengan ketentuan:}$$

- $\frac{M}{100} = \frac{1}{100} \times M \rightarrow$ bunga untuk ukuran masa bunganya
- $\frac{wp}{360} = 1 \rightarrow wp = 360 \rightarrow w = \frac{360}{p}$

Misalkan suatu modal sebesar Rp 1.000.000,00 diperbungakan selama 90 hari. Hitunglah besar bunganya, apabila dasar bunganya:

* 5 % setahun

* $5\frac{1}{2}$ % setahun

Jawab

* Untuk bunga 5% setahun ukuran waktunya adalah

$$w = \frac{360}{5} = 72 \text{ hari}$$

$$\text{Bunga selama 72 hari} = \frac{1}{100} \times 1.000.000 = 10.000$$

$$\text{Bunga selama 18 hari} = \frac{18}{72} \times 10.000 = 2.500$$

$$\text{Bunga 5% selama 90 hari} = 10.000 + 2.500 = 12.500$$

Jadi bunga yang harus dibayarkan adalah Rp 12.500,00

$$\begin{aligned} \text{* Bunga } \frac{1}{2}\% \text{ selama 90 hari} &= \frac{\frac{1}{2}\%}{5\%} \times 12.500 \\ &= \frac{1}{10} \times 12.500 \\ &= 1.250 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Bunga } 5\frac{1}{2}\% \text{ selama 90 hari} &= 12.500 + 1.250 \\ &= \text{Rp } 13.750,00 \end{aligned}$$

II. BUNGA MAJEMUK

A. Pengertian Bunga Majemuk

Untuk memudahkan siswa dalam memahami bunga majemuk guru perlu membandingkannya dengan bunga tunggal. Jika pada bunga tunggal adalah bunga yang dihasilkan di setiap akhir jangka waktu tidak berubah, maka pada bunga majemuk, bunga yang dihasilkan di setiap akhir jangka waktu berikutnya semakin bertambah karena bunga itu sendiri ikut berbunga dengan cara ikut menjadi modal. Untuk lebih jelasnya perlu diberikan contoh.

Contoh:

Misalkan putri meminjamkan modal sebesar Rp 500.000,00 kepada Adi dengan bunga majemuk sebesar 3% setahun. Berapa besar modal itu pada tahun ke 3 ?

Jawab:

Modal mula-mula = Rp 500.000,00

Bunga tahun ke 1 = $\frac{3}{100} \times 500.000 = \frac{\text{Rp } 15.000,00}{\text{Rp } 515.000,00}$

Bunga tahun ke 2 = $\frac{3}{100} \times 515.000 = \frac{\text{Rp } 15.450,00}{\text{Rp } 530.450,00}$

Bunga tahun ke 3 = $\frac{3}{100} \times 530.450 = \frac{\text{Rp } 15.913,50}{\text{Rp } 546.363,50}$

Jadi besar modal pada akhir tahun ke 3 = Rp 546.363,50

Jika modal M dibungakan atas dasar bunga majemuk i persen, maka:

Sesudah 1 tahun modal menjadi = $M + iM = M(1+i)$

Sesudah 2 tahun modal menjadi = $M(1+i) + iM(1+i) = M(1+i)(1+i) = M(1+i)^2$

Sesudah 3 tahun modal menjadi = $M(1+i)^2 + iM(1+i)^2 = M(1+i)^2 (1+i)$
= $M(1+i)^3$

.
. .
. .
. .
. .
. .
. .

Sesudah n tahun modal menjadi = $M(1+i)^{n-1} + iM(1+i)^{n-1} = M(1+i)^{n-1} (1+i)$
= $M(1+i)^n$

Terlihat bahwa $M, M(1+i), M(1+i)^2, M(1+i)^3, \dots, M(1+i)^n$ merupakan barisan geometri. Penyelesaian perhitungan masalah bunga majemuk dapat menggunakan daftar bunga, logaritma maupun kalkulator.

B. Pembahasan Masalah Bunga Majemuk

1. Nilai Akhir Modal

Dengan munculnya bunga di setiap akhir jangka waktu, maka modal semakin berkembang. Misalkan modal yang terus bertambah besarnya itu setelah n tahun menjadi M_n , maka:

$$M_n = M(1+i)^n$$

Contoh soal

Modal sebesar Rp 1.000.000,00 diperbungakan dengan dasar bunga majemuk 3% setahun. Hitunglah nilai akhir modal setelah 3 tahun.

Jawab

Misalkan $M = 1.000.000,00$, $n = 3$ tahun, $p = 3\%$.

$$\begin{aligned} M_3 &= M(1+i)^3 \\ &= 1.000.000 (1+0,03)^3 \\ &= 1.000.000 (1,03)^3 \rightarrow \text{Dari Daftar bunga diketahui} \\ &\quad (1,03)^3 = 1,092727 \\ &= 1.000.000 \times 1.092727 \\ &= 1.092.727 \end{aligned}$$

Jadi nilai akhir setelah 3 tahun = Rp 1.092.727,00

2. Nilai Tunai Modal

Pengertian Nilai Tunai Modal adalah Nilai uang sebesar NT apabila dibungakan selama jangka waktu n dengan bunga i akan menjadi sebesar M .

Sebagai contoh

Hitunglah Nilai Tunai dari modal sebesar Rp 100.000,00 yang lunas dibayar 4 tahun kemudian dengan bunga majemuk 4% setahun.

Jawab

$$M = \text{Rp } 100.000,00$$

$$i = 4\% = 0,04$$

$$n = 4 \text{ tahun}$$

$$M = NT (1+i)^n$$

$$100.000 = NT (1+0,04)^4$$

$$NT = \frac{100.000}{(1+i)^n} \rightarrow \text{Rumus :}$$

$$NT = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$NT = 100.000 \times \frac{1}{(1+0,04)^4}$$

$$= 100.000 \times 0,85480419$$

$$= 85480,42$$

Jadi Nilai Tunai dari modal tersebut adalah Rp 85.480,42

III. RENTE

Pengetian

Yang dimaksud dengan rente adalah barisan modal yang sama besar, yang dibayarkan/diterima berturut-turut dengan antar waktu yang sama. Misalnya: upah mingguan, pembayaran SPP bulanan, sewa rumah tahunan, dan sebagainya. Masing-masing modal yang rutin dibayar dalam jangka waktu atau interval tertentu disebut angsuran.

Berdasarkan banyaknya angsuran, rente dibagi menjadi:

- a. Rente terbatas, yaitu rente yang banyaknya angsuran terbatas
- b. Rente kekal, yaitu rente yang banyaknya angsuran tidak terbatas

Berdasarkan saat pembayaran, rente dibagi menjadi:

- a. Rente Pranumerando, yaitu apabila pembayaran angsuran dilakukan pada tiap permulaan jangka waktu, misalnya: 1 Januari.
- b. Rente Postnumerando, yaitu apabila pembayaran angsuran dilakukan di setiap akhir jangka waktu, misalnya 31 Desember.

A. Rente Pranumerando

1. Nilai Akhir Rente Pranumerando

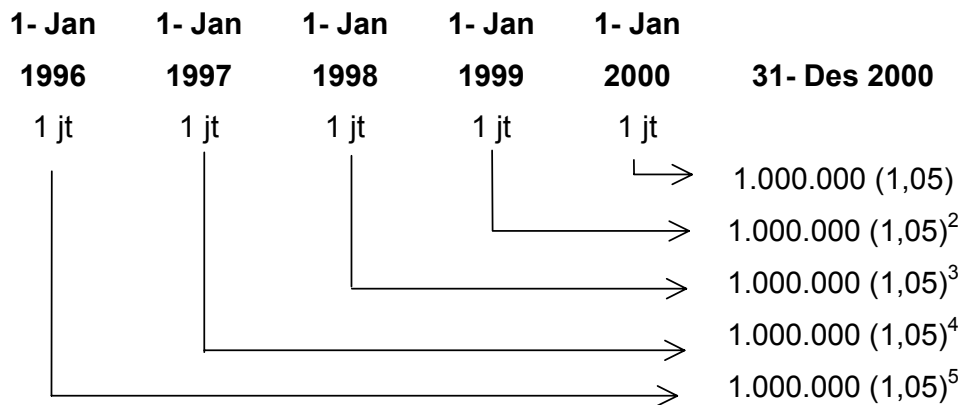
Nilai Akhir Rente Pranumerando adalah jumlah nilai akhir dari semua pembayaran angsuran pranumerando, dihitung pada akhir jangka waktu pembayaran terakhir.

Contoh

Setiap awal tahun Rudi mengirimkan uang sebesar Rp 1.000.000,00 ke bank. Jika bank memberi bunga 5% setahun dan dia mengirimkan uang sejak tahun 1996, berapakah uang Rudi pada akhir tahun 2000?

Jawab

Untuk memudahkan memahaminya, guru perlu membuat sketsa dan perlu diketahui bahwa bank konvensional menggunakan bunga majemuk.



Yang dimaksud nilai-nilai rente adalah nilai-nilai akhir dari masing-masing angsuran. Uang Rudi pada akhir tahun 2000 berjumlah =

$1.000.000(1,05) + 1.000.000 (1,05)^2 + 1.000.000 (1,05)^3 + 1.000.000 (1,05)^4 + 1.000.000 (1,05)^5$. Dapat diketahui dengan jelas bahwa penjumlahan ini adalah deret geometri dengan suku pertama 1.000.000 (1,05), rasio 1,05 dan banyaknya suku 5

Dengan mengingat Rumus $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ maka

$$NA = 1.000.000 (1,05) \frac{(1,05)^5 - 1}{1,05 - 1}$$

Misalkan M = modal, i = bunga, dan n = jangka waktu, maka

$$= 1.000.000 (1,05) \frac{(1,05)^5 - 1}{0,05} \rightarrow$$

$$NA = M(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1.000.000}{0,05} ((1,05)^6 - 1,05) \\
&= 20.000.000 (1,34009564 - 1,05) \\
&= 20.000.000 \times 0,29009564 \\
&= 580.191
\end{aligned}$$

Jadi Nilai Akhirnya Rp 580.191,00

2. Nilai Tunai Rente Pranumerando

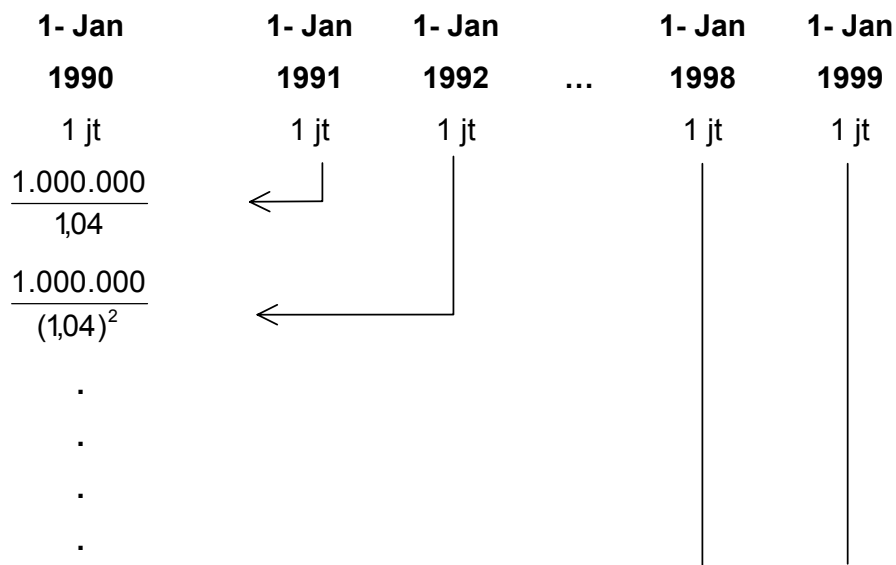
Yaitu jumlah nilai tunai dari semua pembayaran angsuran Pranumerando yang dihitung pada permulaan jangka waktu pembayaran pertama.

Sebagai contoh:

Seseorang mempunyai kewajiban membayar angsuran setiap 1 januari selama 10 tahun sejak 1990 sebesar Rp 1.000.000,00. Dia ingin melunasi seluruhnya pada tanggal itu juga. Berapa uang yang harus dia setorkan jika bunganya 4% setahun?

Jawab

Untuk memudahkan memahami guru perlu membuat sketsa



$$\frac{1.000.000}{(1,04)^8} \quad \leftarrow$$

$$\frac{1.000.000}{(1,04)^9} \quad \leftarrow$$

Yang dimaksud dengan Nilai Tunai Rente adalah jumlah nilai tunai dari masing-masing angsuran. Jadi uang yang harus disetor ke bank adalah sebesar :

$$1.000.000 + \frac{1.000.000}{1,04} + \frac{1.000.000}{(1,04)^2} + \dots + \frac{1.000.000}{(1,04)^8} + \frac{1.000.000}{(1,04)^9}$$

Penjumlahan ini adalah deret geometri dengan suku pertama = 1.000.000, rasio = $\frac{1}{1,04}$ dan banyak suku = 10. Dengan mengingat rumus

$$S_n = a \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right), \text{ diperoleh}$$

$$NT = 1.000.000 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{1,04} \right)^{10}}{1 - \frac{1}{1,04}}$$

Rumus:

$$NT = 1.000.000 \times \frac{1,04}{0,04} \left(1 - \frac{1}{(1,04)^{10}} \right) \rightarrow$$

$$NT = M \times \frac{1+i}{i} \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right)$$

$$= 25.000.000 (1,04 - 0,70258674)$$

$$= 843.533,15$$

Jadi uang yang harus disetor ke bank Rp 843.533,15

B. Rente Postnumerando

1. Nilai Akhir Rente Postnumerando

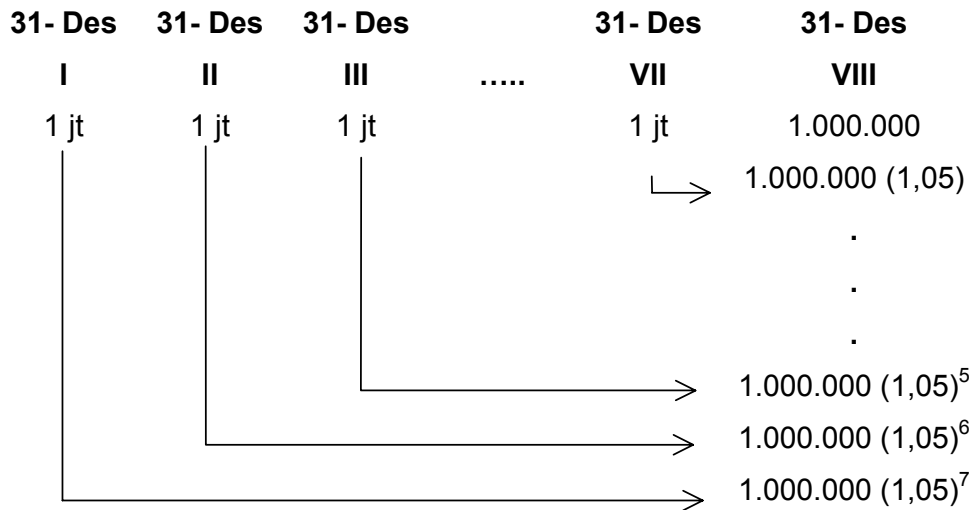
Yaitu jumlah nilai akhir dari semua pembayaran angsuran postnumerando dihitung pada akhir jangka waktu pembayaran terakhir.

Contoh

Setiap akhir tahun seseorang menyetor uang Rp 1.000.000,00 ke bank selama 8 kali angsuran. Jika bunga bank 5% setahun, berapa simpanannya pada akhir tahun ke 8?

Jawab

Untuk memudahkan menyelesaikannya, gambarkan sketsanya.



Nilai Akhir dari Rente Postnumerando di atas: $1.000.000 + 1.000.000(1,05) + \dots + 1.000.000 (1,05)^6 + 1.000.000 (1,05)^7$. Terlihat bahwa penjumlahan ini merupakan deret geometri dengan suku pertama = 1.000.000, rasio = 1,05 dan banyak suku = 8, maka:

$$\begin{aligned}
 NA &= 1.000.000 \left(\frac{(1,05)^8 - 1}{1,05 - 1} \right) \\
 &= \frac{1.000.000}{0,05} ((1,05)^8 - 1) \rightarrow \text{Rumus: } \boxed{NA = \frac{M}{i} ((1+i)^n - 1)} \\
 &= 20.000.000 \times 0,47745544 \\
 &= 954.910,89
 \end{aligned}$$

Jadi simpanannya di akhir tahun ke 8 Rp 954.910,89

2. Nilai Tunai Rente Posnumerando

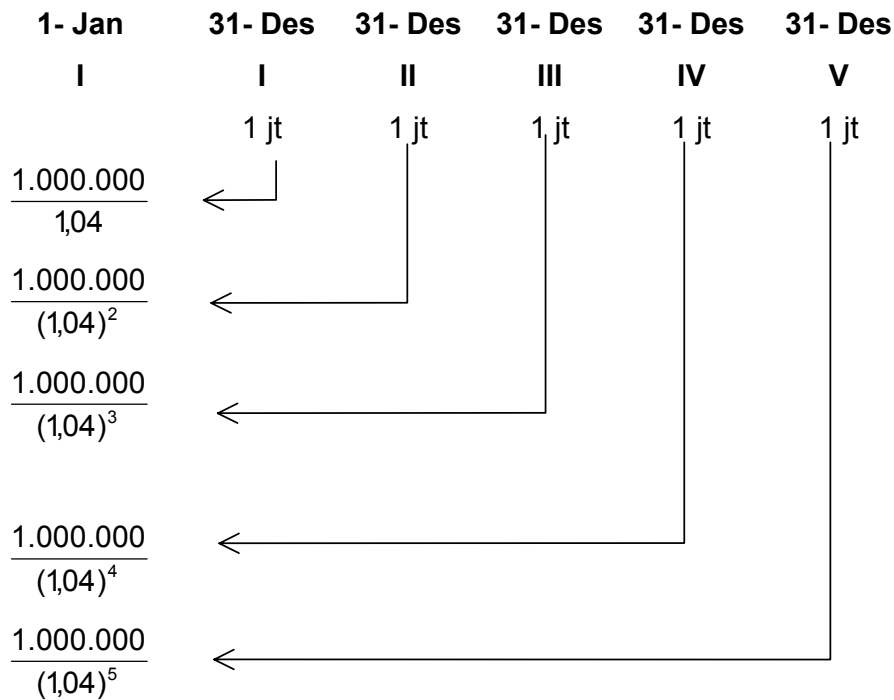
Yaitu jumlah nilai tunai dari semua pembayaran angsuran postnumerando dihitung pada awal jangka waktu pembayaran pertama.

Contoh:

Setiap akhir tahun Nita mengambil uang dari bank sebanyak Rp 1.000.000,00 selama 5 tahun. Nita ingin mengambil semua uang tersebut di awal tahun pertama. Jika bunga abnk 4% berapa uang yang diterima Nita?

Jawab

Gambat sketsa:



Nilai Rente Post Numerando adalah jumlah dari Nilai Tunai semua angsurannya. Jadi Nilai Tunai dari masalah di atas adalah

$$\frac{1.000.000}{1,04} + \frac{1.000.000}{(1,04)^2} + \frac{1.000.000}{(1,04)^3} + \frac{1.000.000}{(1,04)^4} + \frac{1.000.000}{(1,04)^5}$$

Terlihat bahwa penjumlahan ini merupakan deret geometri dengan suku

pertama $\frac{1.000.000}{1,04}$, rasionya $\frac{1}{1,04}$ dan banyak suku 5, maka

$$\begin{aligned}
NT &= \frac{1.000.000}{1,04} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{1,04}\right)^5}{1 - \frac{1}{1,04}} \right) \\
&= \frac{1.000.000}{1,04} \times \frac{1,04}{0,04} \left(1 - \frac{1}{1,04^5} \right) \\
&= \frac{1.000.000}{0,04} \left(1 - \frac{1}{1,04^5} \right) \rightarrow \text{Rumus: } \boxed{NT = \frac{M}{i} \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right)} \\
&= 25.000.000 (1 - 0,82192711) \\
&= 4.451.822,3
\end{aligned}$$

Jadi uang yang diterima Nita Rp 4.451.822,3

C. Rente Kekal

Pada Rente Kekal, karena angsurannya tidak berakhir, maka tidak ada Nilai Akhir. Nilai Tunainya dibedakan menjadi Nilai Tunai Pranumerando Kekal dengan Nilai Tunai Postnumerando Kekal. Rumus perhitungan yang digunakan adalah deret geometri tak hingga

1 Nilai Tunai Rente Pranumerando Kekal

Yaitu jumlah nilai tunai dari semua pembayaran angsuran pranumerando kekal dihitung pada awal jangka waktu pembayaran pertama.

Contoh

Setiap 1 Januari sejak tahun 2001 seorang penyandang cacat menerima bantuan dari pemerintah melalui bank sebesar Rp 500.000,00. Jika dia ingin mendapatkan seluruh bantuan itu sekaligus pada tanggal 1 Januari itu juga, dengan suku bunga 5% setahun, berapa jumlah uang yang diterimanya?

jawab. Gambar Skema

1- Jan 2001	1- Jan 2002	1- Jan 2003	1- Jan 2004	1- Jan 2005
500.000	500.000	500.000	500.000	500.000	
$\frac{500.000}{1,05}$	←				
$\frac{500.000}{(1,05)^2}$	←				
$\frac{1.000.000}{(1,04)^3}$	←				
$\frac{1.000.000}{(1,04)^4}$	←				
.					
.					
.					
.					

Jumlah uang yang diterima pada tanggal 1 Januari 2001 adalah

$$500.000 + \frac{500.000}{1,05} + \frac{500.000}{1,05^2} + \frac{500.000}{1,05^3} + \dots$$

Diketahui bahwa penjumlahan tersebut merupakan deret geometri tak hingga, dengan suku pertama 500.000, rasio $\frac{1}{1,05}$, maka

$$NT = \frac{500.000}{1 - \frac{1}{1,05}}$$

$$= \frac{500.000}{0,05} \times 1,05$$

$$= \frac{500.000}{0,05} + 500.000 \rightarrow \text{Rumus:}$$

$$NT = \frac{M}{i} + M$$

$$= 10.500.000$$

Jadi uang yang diterimanya sebanyak Rp 10.500.000,00

2. Nilai Tunai Rente Postnumerando kekal

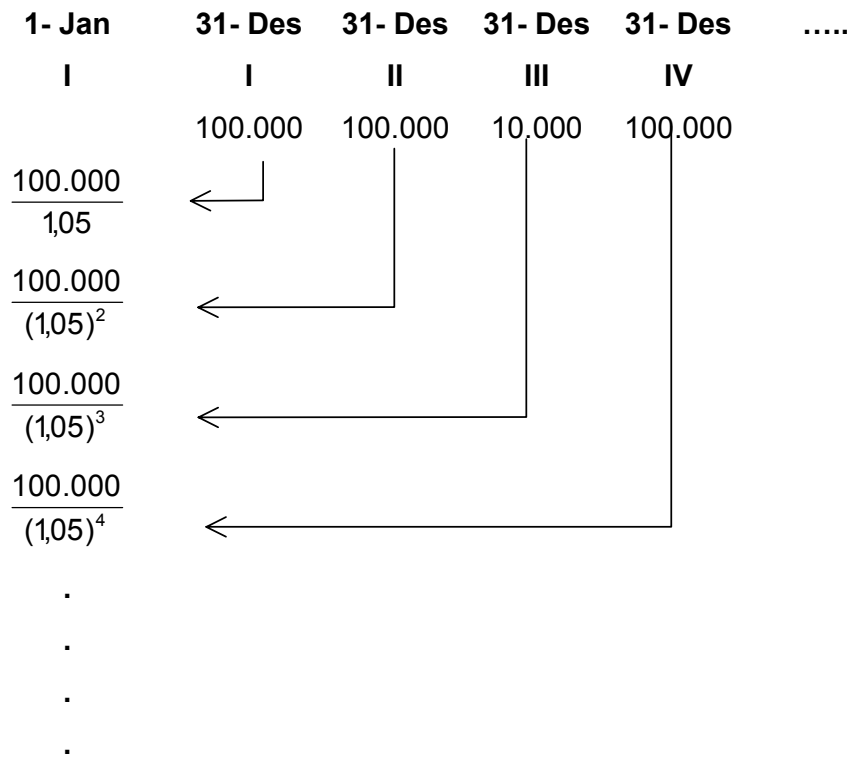
Yaitu jumlah nilai tunai dari semua pembayaran angsuran postnumerando kekal dihitung pada awal jangka waktu pembayaran pertama.

Contoh

Suatu yayasan mempunyai kewajiban membayar kepada pemerintah (melalui bank) sebesar Rp 100.000,00 setiap akhir tahun untuk jangka waktu yang tidak terbatas. Yayasan tersebut ingin menyelesaikan seluruh kewajibannya tersebut di awal tahun pertama. Jika suku bunga bank 5% setahun, berapa besar uang yang dibayarkannya?

Jawab

Gambar Skema



Uang yang dibayarkan yayasan tersebut di awal tahun pertama adalah jumlah dari Nilai Tunai setiap angsurannya, yang dihitung pada awal tahun pertama, yaitu $\frac{100.000}{1,05} + \frac{100.000}{(1,05)^2} + \frac{100.000}{(1,05)^3} + \frac{100.000}{(1,05)^4} + \dots$

Terlihat bahwa penjumlahan tersebut adalah deret geometri tak hingga dengan suku pertama $\frac{100.000}{1,05}$, rasio $\frac{1}{1,05}$, maka

$$\begin{aligned}
 NT &= \frac{100.000}{1,05} : \left(1 - \frac{1}{1,05}\right) \\
 &= \frac{100.000}{1,05} \times \frac{1,05}{0,05} \\
 &= \frac{100.000}{0,05} \rightarrow \text{Rumus: } \boxed{NT = \frac{M}{i}} \\
 &= 2.000.000
 \end{aligned}$$

Jadi uang yang harus dibayar yayasan tersebut sebesar Rp 2.000.000,00

D. Rente Yang Ditangguhkan

Yang dimaksud dengan Rente Yang Ditangguhkan adalah Rente yang pembayaran angsuran pertamanya bukan di awal atau di akhir dari jangka waktu pembayaran pertama, tetapi beberapa waktu kemudian.

1. Rente Yang Ditangguhkan dengan jangka waktu terbatas

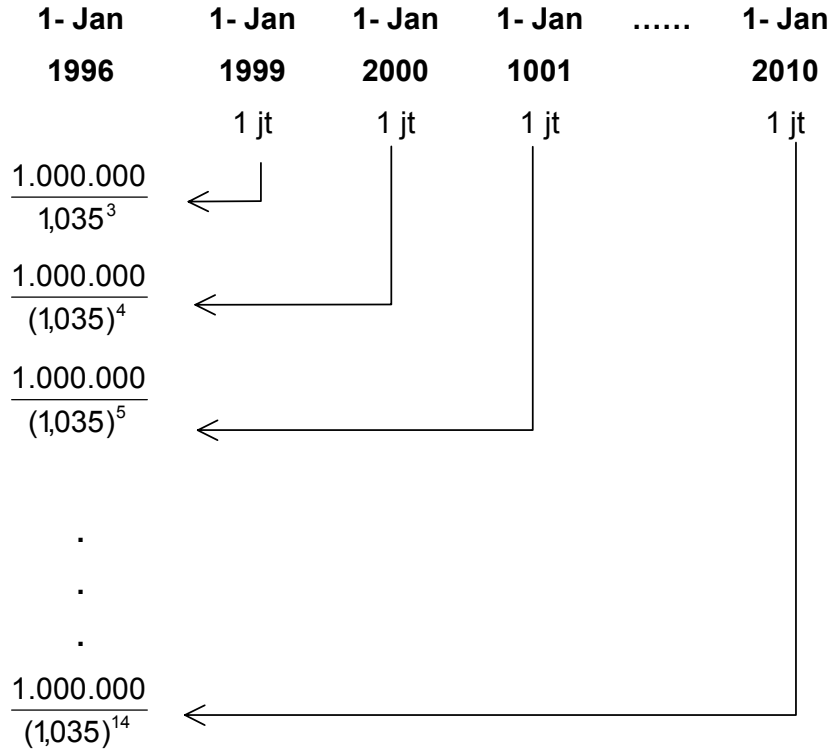
Yaitu Rente Yang Ditangguhkan dimana banyaknya angsuran diketahui

Contoh

Suatu rente tahunan dengan angsuran Rp 1.000.000,00 dibayar mulai tanggal 1 Januari 1999 dan berakhir 1 Januari 2010 dengan suku bunga 3,5%. Berapa nilai Tunai pada tanggal 1 Januari 1996?

Jawab

Gambar Skema



Nilai Tunai pada tanggal 1 Januari adalah jumlah dari seluruh Nilai Tunai angsurannya, yaitu

$$\frac{1.000.000}{(1,035)^3} + \frac{1.000.000}{(1,035)^4} + \frac{1.000.000}{(1,035)^5} + \dots + \frac{1.000.000}{(1,035)^{14}}$$

Penjumlahan ini adalah deret geometri dengan suku pertama $\frac{1.000.000}{(1,035)^3}$,

rasio $\frac{1}{(1,035)^3}$ dan banyak suku 12, maka

$$NT = \frac{1.000.000}{(1,035)^3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{1,035}\right)^{12}}{1 - \frac{1}{1,035}}$$

$$= \frac{1.000.000}{(1,035)^3} \times \frac{1,035}{0,035} \left(1 - \frac{1}{1,035^{12}} \right)$$

$$= \frac{1.000.000}{(0,035)} \times \frac{1}{1,035^2} \left(1 - \frac{1}{1,035^{12}} \right)$$

$$= \frac{1.000.000}{(0,035)} \times \left(\frac{1}{1,035^2} - \frac{1}{1,035^{14}} \right) \rightarrow$$

Rumus:

$$NT = \frac{M}{i} \left(\frac{1}{(1+i)^{k-1}} - \frac{1}{(1+i)^n} \right)$$

$$= 28.571.428,6 (0,93351070 - 0,61778179)$$

$$= 9.020.826$$

Jadi Nilai Tunai pada tanggal 1 Januari 1996 Rp 9.020.826,00

2. Rente Yang Ditangguhkan dengan jangka waktu tidak terbatas (kekal)

Yaitu Rente Yang Ditangguhkan akan tetapi banyaknya angsuran tak hingga

Contoh

suatu Rente kekal dengan angsuran Rp 1.000.000,00 dibayarkan angsuran pertama pada tanggal 1 Januari 1999 dengan bunga $3\frac{1}{2}\%$. Berapa nilai tunainya pada tanggal 1 Januari 1996?

Jawab

Skema yang dapat kita susun adalah sebagai berikut:

1- Jan 1996	1- Jan 1999 1 jt	1- Jan 2000 1 jt	1- Jan 1001 1 jt
$\frac{1.000.000}{1,035^3}$	←			
$\frac{1.000.000}{(1,035)^4}$	←			
$\frac{1.000.000}{(1,035)^5}$	←			
.				
.				
.				

Nilai Tunai yang dihitung dari 1 januari 1996 adalah

$$\frac{1.000.000}{(1,035)^3} + \frac{1.000.000}{(1,035)^4} + \frac{1.000.000}{(1,035)^5} + \dots$$

penjumlahan ini merupakan deret geometri tak hingga dengan suku

pertama = $\frac{1.000.000}{(1,035)^3}$, rasio = $\frac{1}{(1,035)}$ maka:

$$NT = \frac{1.000.000}{(1,035)^3} : \left(1 - \frac{1}{(1,035)} \right)$$

$$= \frac{1.000.000}{(1,035)^3} : \frac{0,035}{1,035}$$

$$= \frac{1.000.000}{(1,035)^3} \times \frac{1,035}{0,035}$$

$$= \frac{1.000.000}{0,035} \times \frac{1}{(1,035)^2} \rightarrow \text{Rumus:}$$

$$NT = \frac{M}{i} \times \frac{1}{(1+i)^{k-1}}$$

k = jangka waktu antara penerimaan NT dengan angsuran awal

$$= 28.571.428,6 \times 0,93351070$$

$$= 26.671.734,3$$

Jadi Nilai Tunai pada tanggal 1 Januari 1996 adalah Rp 26.671.734,3

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Uang sebanyak Rp 100.000,00 harus ditambah dengan 3% diatas seratusnya. Hitunglah jumlah uang itu.
2. Suatu modal diperbungakan selama 8 bulan. Bila dasar bunganya $p\%$ setahun, tentukan besar p jika bunga yang diperolehnya adalah $\frac{1}{5}$ dari modalnya.
3. Joko meminjam uang pada Reza. Ia menerima Rp 475.000,00 setelah dikurangi 5% diskonto. Hitunglah pinjaman Joko pada Reza
4. Seseorang meminjam uang di bank dengan bunga tunggal 5% setahun. Setelah 1 tahun dia mengembalikan Rp 840.000,00. Berapakah uang yang dipinjamnya?
5. Berapakah besarnya bunga dari modal Rp 1.250.000,00 yang diperbungakan selama 150 hari atas dasar bunga $4\frac{1}{2}\%$ setahun, jika 1 tahun = 365 hari.
6. Berapakah besarnya bunga jika suatu modal sebesar Rp 1.500.000,00 diperbungakan selama 100 hari dengan dasar bunga 6% dengan menggunakan metode bagian yang seukuran dengan waktu.
7. Modal sebesar Rp 2.500.000,00 diperbungakan selama 5 tahun atas dasar bunga majemuk 2% per tiga bulan. Berapakah Nilai Akhir dari modal tersebut?
8. Uang sebesar Rp 1.500.000,00 diperbungakan dengan bunga 4% per tiga bulan. Agar uang tersebut menjadi Rp 3.000.000,00 berapa lama harus diperbungakan?
9. Joko meminjam uang dan akan dikembalikan setelah 1 tahun sebesar Rp 4.000.000,00. Bila suku bunga yang disepakati adalah 2% per bulan. Berapakah jumlah uang yang dipinjam Joko?
10. Pada setiap awal bulan sejak Januari 2000 Eko menabung di bank sebesar Rp 500.000,00. Jika bank memberi bunga $1\frac{1}{2}\%$ tiap bulan, berapakah jumlah tabungan Eko pada akhir tahun 2001?

11. Pada setiap awal bulan sejak Januari 2000 Anton menerima bantuan melalui bank dari sebuah yayasan sebesar Rp 150.000,00 selama 1 tahun. Karena ada suatu keperluan penting, ia ingin mengambil semua bantuannya itu sekaligus pada awal Januari 2000. Jika bunga yang diperhitungkan bank adalah 2% per bulan, berapakah besar uang yang diterimanya?
12. Pada setiap akhir bulan sejak Januari 2001 Tuti menabung di bank sebesar Rp 100.000,00. Jika bank memberikan bunga 2% per bulan, berapakah jumlah tabungannya di akhir bulan Oktober tahun itu?
13. Pada awal Januari 2000 Budi meminjam uang dari bank dengan jaminan potongan gajinya sebesar Rp 200.000,00 setiap akhir bulan sejak Januari 2000 selama 2 tahun. Berapakah pinjaman yang dikabulkan bank jika bunga yang disepakati 2% sebulan?
14. Pada setiap akhir bulan Toni menabung sebesar Rp 400.000,00. Suatu saat ia melihat rekening tabungannya berjumlah Rp 4.226.733,86. Jika bank memperhitungkan tingkat bunga 1% per bulan, sudah berapa lama Toni menabung di bank tersebut?
15. Berapakah Nilai Tunai pada awal tahun 1996 dari rente tahunan dengan angsuran sebesar Rp 120.000,00 jika angsuran pertama dibayar pada awal 2000 dan berakhir pada awal 2008, dengan bunga 6% setahun?
16. Suatu yayasan menerima bantuan dari pemerintah secara terus-menerus pada setiap awal bulan sejak Januari 2000 sebesar Rp 1.200.000,00. Yayasan tersebut ingin mendapatkan semua bantuan tersebut sekaligus pada saat penerimaan pertama. Berapakah bantuan yang diterimanya jika bunga yang diperhitungkan 1% setiap bulan.

DAFTAR PUSTAKA

1. **Sartono Wirodikromo, Drs**, *Matematika SMA untuk Program Ilmu-Ilmu Sosial*, Semester 4, Erlangga, 1991
2. **Moch. Chotim, Drs**, *Matematika Jurusan IPS*, Kelas 3, Pt. Bina Ilmu, 1982
3. **Moch. Chotim, Drs**, *Matematika Jurusan IPS*, Kelas 2, Pt. Bina Ilmu, 1982
4. **MK Alamsyah, Drs**, *Pelajaran Matematika SMK Jurusan Administrasi Perkantoran*, Kelas 2, Armico, Bandung, 1996